

INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

<http://balkanski-foundation.org/>

Concours Général de Physique “Minko Balkanski”

10 Mai 2015

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат *яснотата и стилът* на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и *кратки*. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. *Пишете само на езика, който сте избрали* (френски или английски).

При намиране на грешка в условията на задачите отбележете я в работата си и продължете *без да повдигате въпроси към квесторите*.

Класирането ще бъде изложено на сайта на Фондация Миню Балкански в началото на месец юни. Ако имате въпроси и коментари можете да ги насочите към svilen.iskrov@gmail.com. С първенците ще се свържем чрез e-mail или по телефон. Бъдете сигурни да попълните правилно информацията за контакт.

Разполагате с 4 часа. Успех!

Première partie

Français

1 Plasmons localisés et force de Casimir (16 pts)

1.1 Force entre deux dipôles

On considère quatre charges électriques 1, 2, 3 et 4 comme à la Figure 1. Les charges 1 et 2 sont respectivement égales à $+q_A$ et $-q_A$, alors que les charges 3 et 4 sont respectivement $+q_B$ et $-q_B$. Les charges 1 et 2 sont rigidement accrochées l'une à l'autre par une tige de longueur L , et de même pour les charges 3 et 4. On appelle alors les ensembles (1, 2) et (3, 4) des dipôles.

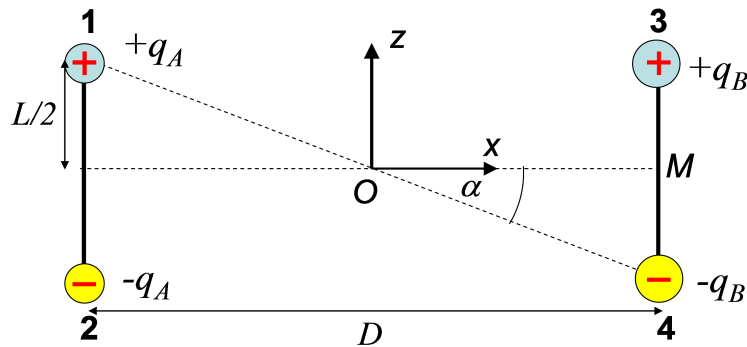


Figure 1 : Dipôles électriques

1. Donner la force électrostatique $F_{1 \rightarrow 3}$ qui s'exerce sur la charge 3 de la charge 1.
2. De même donner la force $F_{2 \rightarrow 3}$ qui s'exerce sur la charge 3 de la charge 2.
3. Exprimer l'angle α (Figure 1) en fonction des distances L et D . Quelle est la projection $F_{(2 \rightarrow 3)x}$?
4. Donnez la résultante des projections des deux forces $F_{2 \rightarrow 3}$ et $F_{1 \rightarrow 3}$ selon l'axe des Ox . Que devient cette résultante si $L \ll D$? On rappelle la formule approchée : $(1 - x)^\beta \approx 1 - \beta x$, valable pour $x \ll 1$.
5. De la même façon, donnez la résultante des projections sur Ox des deux forces $F_{2 \rightarrow 4}$ et $F_{1 \rightarrow 4}$ qui agissent sur la charge 4.
6. Donnez alors la force totale selon Ox , F_{tot} , avec laquelle l'ensemble (1, 2) interagit avec l'ensemble (3, 4). Cette force est-elle attractive ou répulsive ? Exprimez cette force à l'aide des moments dipolaires $d_A = q_A \cdot L$ et $d_B = q_B \cdot L$.
7. Que peut-on dire pour la résultante des forces selon l'axe Oz ?
8. Toujours dans l'approximation $L \ll D$ démontrez que le champ électrique $E(D)$ créé par les charges 1 et 2 au point M (Figure 1) s'écrit $E(D) = \frac{d_A}{4\pi\epsilon_0 D^3}$ et qu'il est orienté dans le sens négatif de l'axe Oz .

1.2 Dipôle induit par un champ externe

Modèle d'un métal : Les métaux sont constitués par des ions positifs figés dans l'espace et autant d'électrons mobiles (Figure 2.a). Souvent pour simplifier les problèmes, on oublie le caractère corpusculaire de la matière et on modélise les ions comme un fond de densité de charge $\rho+$ et les électrons comme une fluide incompressible de densité de charge $\rho-$ (Figure 2.b).

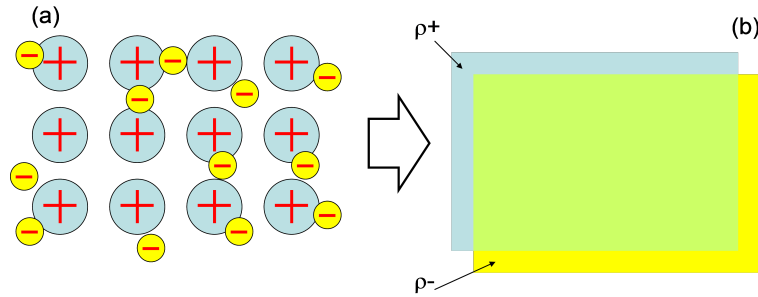


Figure 2 : Modèle d'un métal

1. Soit un cube en métal (on va l'appeler nanoparticule dans la suite) de dimensions $1\mu m \times 1\mu m \times 1\mu m$ (Figure 3.a). La densité volumique des atomes est $n = 10^{23}cm^{-3}$. Quelle est la charge positive des ions dans ce cube ? On rappelle que la charge de l'électron est $e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$.
2. On considère maintenant que le nuage des électrons est légèrement décalé par rapport aux ions de la nanoparticule comme à la Figure 3.b, dans la direction selon Oz . Le décalage, noté Δz , est tel que $\Delta z \ll L = 1\mu m$, où L est le côté de la nanoparticule. Il apparaît donc des zones de charges d'espace non-compensées. Quelle est alors la densité de charges surfaciques σ dans chaque zone ?

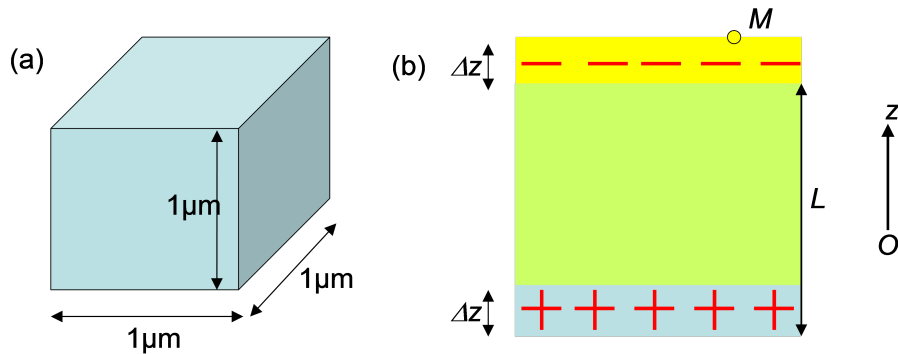


Figure 3 : Une nanoparticule métallique

3. Quelle est la charge totale Q dans ces zones ?
4. Quel est le champ électrique E_{int} à l'intérieure de la nanoparticule ? Par mesure de simplification, on va considérer que le problème électrostatique a la même solution que le problème des plans parallèles infinis. On notera ϵ_0 la constante électrique (permittivité du vide).

5. Soit une nanoparticule initialement sans zones de charge d'espace. On applique un champ électrique extérieur E_{ext} selon Oz . Alors il apparaît des zones de charge d'espace telles que le champ extérieur est parfaitement compensé par le champ intérieur E_{int} . Montrer alors que le moment dipolaire induit $d_{ind} = Q.L$ s'exprime sous la forme : $d_{ind} = -\varepsilon_0 E_{ext} L^3$.

1.3 Oscillations plasma

On considère maintenant la nanoparticule, toujours dans la situation décrite dans la Figure 3.b, mais sans champ électrique extérieur. Le champ intérieur E_{int} agit sur les électrons et tend à ramener le système à l'équilibre (i.e. recouvrement parfait entre les densités des ions et des électrons).

1. Pour modéliser cet effet, on va considérer que le champ E_{int} agit sur un électron situé à l'extrémité de la zone de charge d'espace négative (point M , Figure 3.b). Montrer que l'équation du mouvement de l'électron est : $m_e \frac{d^2 z_M}{dt^2} = -\frac{e^2}{\varepsilon_0} n \Delta z$, avec $m_e = 9,1.10^{-31} kg$ la masse de l'électron, et z_M sa position.
2. On va supposer que la position z_M est toujours la frontière de la zone de charge d'espace : $z_M = L + \Delta z$. Expliquez alors que la distribution des électrons oscille avec une fréquence ω_P appelée « fréquence plasma » préciser son équation.
3. Donnez la valeur numérique de la fréquence plasma ($\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12} F/m$).

1.4 Forces de Casimir

1. On revient sur le cas statique décrit à la Figure 3.b. On considère maintenant le système comme un condensateur plan. Quelle est sa capacité C ?
2. Donnez l'énergie électrique W stockée dans le condensateur en fonction du moment dipolaire $d_P = Q.L$.
3. D'après les principes de la mécanique quantique, un système qui oscille à la fréquence ω_P à une énergie minimale possible égale à $\frac{\hbar \omega_P}{2}$ avec $\hbar = 1,05.10^{-34} J.s$ la constante de Planck. En utilisant la question précédente, exprimez le moment dipolaire d_P de cet état en fonction de L , ε_0 et $\hbar \omega_P$.

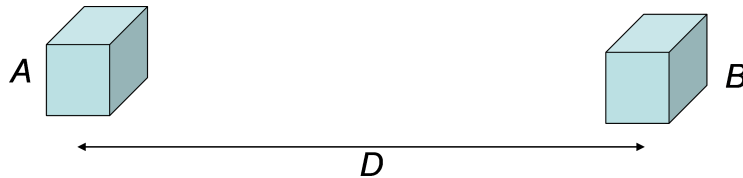


Figure 4 : Deux nanoparticules identiques

4. On considère maintenant deux nanoparticules A et B identiques à une distance D l'une de l'autre, comme à la Figure 4. Les nanoparticules sont cubiques de taille L comme à la Figure 3.a, et on suppose que $L \ll D$. Initialement aucune des particules n'est chargée. Ensuite dans la particule A il apparaît un dipôle spontané quantique d_P , comme calculé dans la question 1.4.3. En utilisant la question 1.1.8, quel est le champ électrique créé par ce dipôle au niveau de la nanoparticule B ?

5. En utilisant le résultat de la question 1.2.5, donnez le dipôle induit dans la nanoparticule B .
6. En utilisant le résultat du 1.1.6, donnez la force F qui apparaît alors entre A et B . Il s'agit d'une force d'origine purement quantique, appelée force de Casimir ou encore force de Van der Waals.
7. Calculer numériquement la force de Casimir en supposant que $L = 1\mu m$ et $D = 10\mu m$. Comparer avec le poids de chaque particule, en supposant qu'il s'agit de nanoparticules d'or de masse volumique $20g.cm^{-3}$.

2 Evolution d'un processus isochore (2 pts)

On considère un récipient cylindrique séparé par un piston mobile et massif. Les deux volumes délimités par le piston contiennent la même quantité de gaz parfait à la même température. Le rapport entre les volumes de la partie supérieure et la partie inférieure est égal à 3 (Figure 5). Quel est ce rapport lorsqu'on double la température du système ?

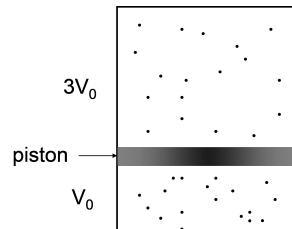


Figure 5 : Récipient cylindrique

3 Temps de rebondissement d'une goutte (2 pts)

Déterminer, par une analyse dimensionnelle, l'ordre de grandeur du temps de rebondissement τ d'une goutte de rayon R et de vitesse V qui collisionne sur une surface hydrophobe (Figure 6). La tension de surface du liquide est γ , sa masse volumique ρ . On rappelle que l'énergie de surface de la goutte s'écrit comme $E = \gamma A$, avec A la superficie de la goutte. On néglige les effets de la viscosité.

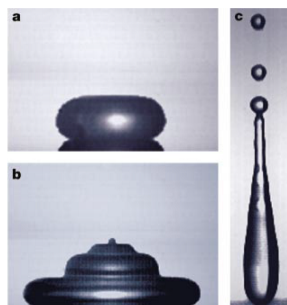


Figure 6 : Trois situations de gouttes de 1mm de rayon rebondissant sur une surface super-hydrophobe en fonction de la vitesse de la goutte. La vitesse de la goutte croît de a) à c). En b) des ondes de surfaces apparaissent qui déforment toute la goutte. En c) la goutte se fragmente en plusieurs gouttelettes avant de se détacher de la surface.

Néanmoins le temps de rebondissement ne dépend pas du détail de l'impact.

Part II

English

1 Localized plasmons and Casimir forces (16 pts)

1.1 Force between dipoles

Let us consider four electric charges 1, 2, 3 and 4 as indicated in Figure 1. Charges 1 and 2 are respectively equal to $+q_A$ et $-q_A$, while charges 3 and 4 are equal to $+q_B$ et $-q_B$. Charges 1 and 2 are rigidly attached one to another through a bar of length L , and so are charges 3 et 4. The pairs (1, 2) and (3, 4) are called dipoles.

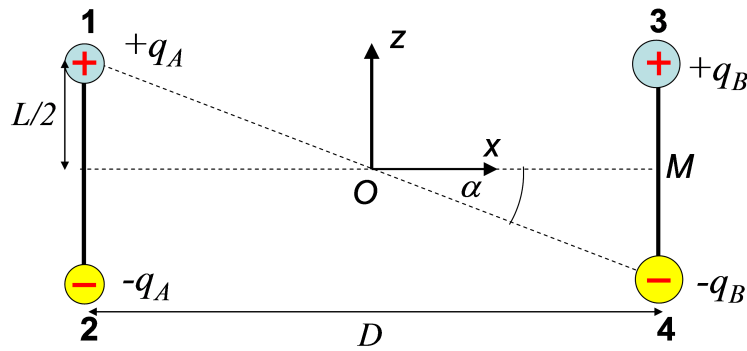


Figure 1 : Electric dipoles

1. What is the electrostatic force $F_{1 \rightarrow 3}$ acting on charge 3 by charge 1.
2. Provide also the force $F_{2 \rightarrow 3}$ acting on charge 3 by charge 2.
3. Express the angle α (Figure 1) as a function of the distances L and D . What is the projection of $F_{(2 \rightarrow 3)_x}$ on the Ox axis?
4. What is the resultant force of the projections of the two forces $F_{2 \rightarrow 3}$ and $F_{1 \rightarrow 3}$ along the Ox axis. What happens for $L \ll D$? We recall the following approximate expression : $(1 - x)^\beta \approx 1 - \beta x$, satisfied for $x \ll 1$.
5. Likewise, provide the sum of the projections along the Ox axis that correspond to the forces $F_{2 \rightarrow 4}$ and $F_{1 \rightarrow 4}$ applied on the charge 4.
6. Provide the Ox projection of the overall force F_{tot} , acting on the pair (3, 4) on behalf of the pair (1, 2). Is this force repulsive or attractive? Provide an expression of that force as a function of the dipole moments $d_A = q_A \cdot L$ and $d_B = q_B \cdot L$.
7. What is the projection of the overall force on the Oz axis?
8. Using the approximation $L \ll D$, justify that the total electric field $E(D)$ created by the charges 1 et 2 at point M (Figure 1) could be written as $E(D) = \frac{d_A}{4\pi\epsilon_0 D^3}$ and it is oriented along the negative Oz axis.

1.2 Dipole induced by external field

A model for metals : Metals are made of positive ions, fixed in space, and of the same number of mobile electrons (Figure 2.a). In order to simplify, one often disregards the microscopic nature of the metal and ions are modelled as a positive background of charges with density $\rho+$, while the electrons like a incompressible fluid of charges with density $\rho-$ (Figure 2.b).

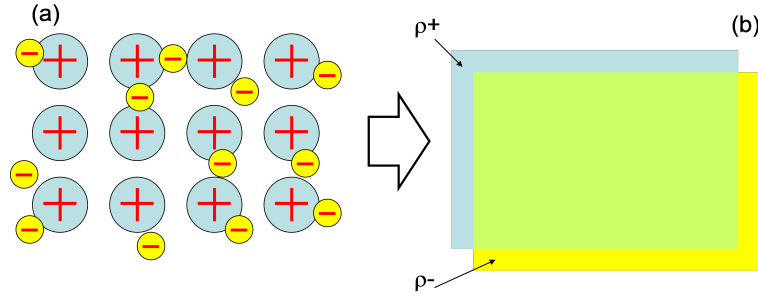


Figure 2 : A model for metals

1. Let us consider a cubic piece of metal (referred to as a nanoparticle in the following sections) of dimensions $1\mu m \times 1\mu m \times 1\mu m$ (Figure 3.a). The volume density of its atoms is $n = 10^{23} cm^{-3}$. What is the overall charge of ions in the cube? We recall that the electron charge is $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$.
2. We now consider that the cloud of electrons is slightly displaced with respect to the ions of the nanoparticle as indicated in Figure 3.b, along the Oz direction. The displacement noted Δz , is such as $\Delta z \ll L = 1\mu m$, where L is the nanoparticle side. In this situation, there are zones of uncompensated charges. What is the surface charge density σ in each zone?

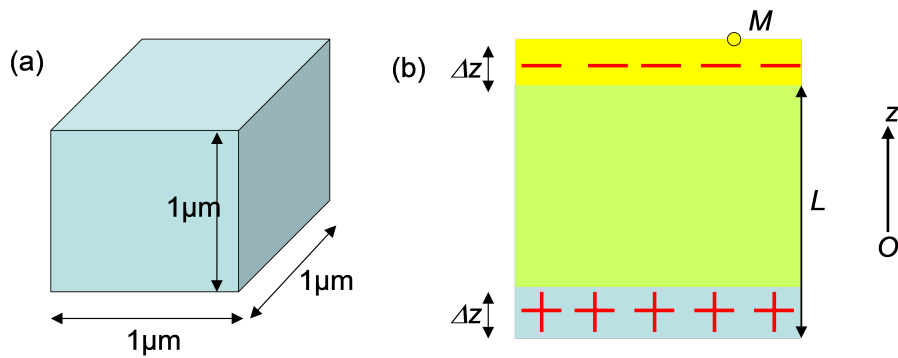


Figure 3 : A metallic nanoparticle

3. What is the total charge Q for each zone?
4. What is the electric field E_{int} inside the nanoparticle? In order to simplify, we consider that the electrostatic problem is identical to that of two infinite parallel plates. The electric constant is noted by ϵ_0 (vacuum permittivity).

- Let us consider a nanoparticle that initially has no zones of excess charges. One applies an external electric field E_{ext} along the Oz axis. As a result, excess charge zones appear, in such a way that the external field is perfectly compensated by the internal field E_{int} . Show that the induced dipole moment $d_{ind} = Q.L$ is : $d_{ind} = -\varepsilon_0 E_{ext} L^3$.

1.3 Plasma oscillations

We now consider that the nanoparticle is still in the situation described in 3.b, however there is no external electric field. Now the internal field E_{int} acts on the electrons and tries to restore the equilibrium in the system (that is, a perfect overlap between the electronic and ionic densities).

- In order to model this effect, we study the action of the field E_{int} on an electron situated at the limit of the negative charge zone (point M , Figure 3.b). Show that the equation of motion of the electron is : $m_e \frac{d^2 z_M}{dt^2} = -\frac{e^2}{\varepsilon_0} n \Delta z$, with $m_e = 9,1.10^{-31} kg$ the electron mass, and z_M its position.
- We suppose that the position z_M always coincides with the limit of the space charge zone : $z_M = L + \Delta z$. Explain why the electronic distribution oscillates at a frequency ω_P called « plasma frequency » and provide its expression.
- Provide the numerical value of the plasma frequency ($\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12} F/m$).

1.4 Casimir forces

- We now consider the static case described in Figure 3.b. The system is viewed as a parallel plate capacitor. What is its capacitance C ?
- Provide the electric energy W stored in the capacitor as a function of the dipole moment $d_P = Q.L$.
- According to the principles of quantum mechanics, a system oscillating at the frequency ω_P has a minimal energy equal to $\frac{\hbar \omega_P}{2}$, with $\hbar = 1,05.10^{-34} J.s$ the Planck's constant. Using the previous question, compute the dipole moment d_P of this state as a function of L , ε_0 and $\hbar \omega_P$.

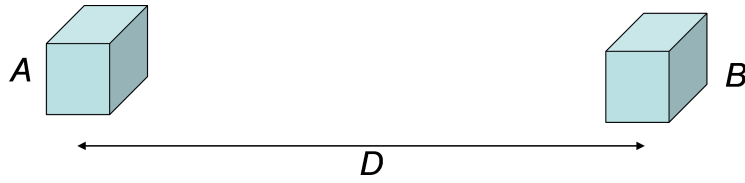


Figure 4 : Two identical nanoparticles

- Let us now consider two identical nanoparticles A and B separated by a distance D as shown in Figure 4. The nanoparticles are cubes of side L , as in the Figure 3.a, and we have $L \ll D$. Initially none of the particles is charged. Then the particle A acquires a spontaneous quantum dipole d_P , just as described in question 1.4.3. Using question 1.1.8, what is the electric field created by this dipole at the site of the nanoparticle B ?

5. Using question 1.2.5, provide the dipole induced in the nanoparticle B .
6. Using the results from 1.1.6, provide the force F that appears between A et B . The origin of this force is of purely quantum nature. It is called Casimir force or Van der Waals interaction.
7. Compute the Casimir force numerically using the values $L = 1\mu m$ and $D = 10\mu m$. Compare with the weight of each particle, if they are made of gold with mass density of $20g.cm^{-3}$.

2 Isochoric process (2 pts)

We consider a cylindrical recipient divided in two compartments by a massive and mobile piston. The two compartments contain equal quantities of perfect gas at the same temperature. As indicated in Figure 5, the ratio between the volumes of the upper and lower compartment is equal to 3. What becomes this ratio if the temperature of the system is doubled?

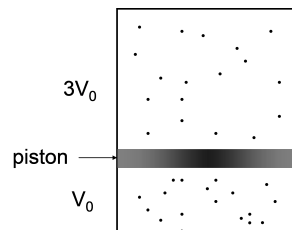


Figure 5 : A cylindrical recipient

3 Bouncing drops (2 pts)

When a liquid drop lands on a solid surface without wetting it, it bounces with remarkable elasticity. Using a dimensional analysis, determine the order of magnitude of the contact time τ between a liquid drop of radius R and a hydrophobic surface (Figure 6). The liquid surface tension is γ and it's density is ρ . We remind that the energy associated to the liquid surface tension is $E = \gamma A$, where A is the total liquid area. Neglect liquid viscosity.

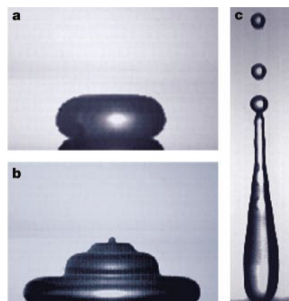


Figure 6 : Millimeter-sized water drop hitting a super-hydrophobic solid. Drop's velocity is gradually increasing from a) to c). In b) waves develop along the surface and structure the drop. In c) the drop becomes highly elongated before detaching and gives rise to droplets; however the contact time is *independent* of the details of the impact.